Longitud y tiempo

R. O. Barrachina

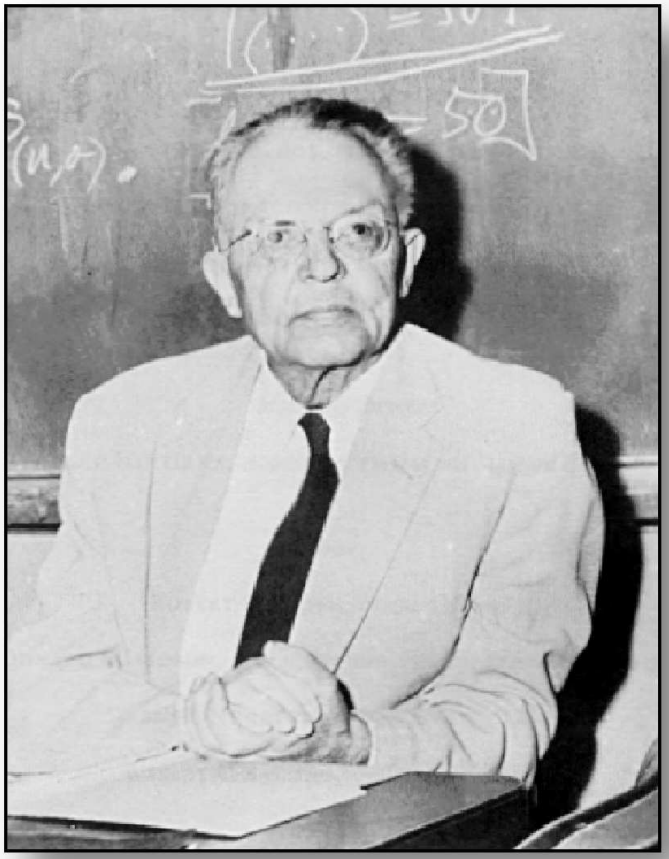
... las únicas preguntas realmente serias son aquellas que aún un niño puede formular. Sólo las preguntas más inocente son realmente serias. Son las preguntas sin respuesta. Una pregunta sin respuesta es una barrera que no se puede franquear. En otras palabras, las preguntas sin respuesta establecen los límites de las posibilidades humanas, describen los límites de la existencia humana.
Milan Kundera: La Insoportable levedad del ser.

1. Rudolf Carnap

Durante el otoño de 1958, Rudolf Carnap dictó un curso de epistemología en la Universidad de California en Los Angeles. Martin Gardner (1914-), famoso por sus artículos de matemática recreativa en la revista Scientific American, ya había escuchado este mismo curso cuando Carnap lo dictó en Chicago en 1946. Así que aprovechó esta segunda oportunidad para escribir un libro que, tras extensas correcciones del mismo Carnap, se publicó en 1966 con el título de "Fundamentación Filosófica de la Física". Analicemos algunos puntos importantes de este tratado.

Los conceptos de la ciencia pueden dividirse en tres grandes grupos: clasificatorios, comparativos y cuantitativos. Los conceptos clasificatorios ubican un objeto en una cierta clase. La taxonomía de la botánica, con sus especies, familias, géneros, etc, es un ejemplo del primer grupo. Cuando decimos que un objeto está más caliente que otro, estamos usando un concepto comparativo. Finalmente, llegamos a los conceptos cuantitativos, es decir expresables en forma numérica. La física es una de las pocas ciencias que utiliza casi exclusivamente este último tipo de conceptos.

En Mecánica trabajamos con tres conceptos cuantitativos: "longitud", "tiempo" y "masa". Estos parecen conceptos simples, pero en realidad son de una tremenda complejidad. Pasa con ellos lo que decía San Agustín (354-430):



Rudolf Carnap (Rondsdorf, Alemania 1891 - Los Angeles, USA 1970) es la figura central de uno de los más importantes movimientos filosóficos del siglo XX, el *empirismo lógico*. Cursó estudios de física y filosofía en Jena y Friburgo. Siendo profesor en Viena (1926-1931), participó en las reuniones periódicas de un grupo de filósofos, matemáticos y científicos naturales y sociales que se conoce con el nombre de *Círculo de Viena*, quienes pondrían de cabeza los conceptos clásicos de la epistemología científica. En 1936, ante el avance del nazismo, Carnap emigró a Estados Unidos, trabajando en las universidades de Chicago (1936-1952), Princeton (1952-1954) y California en Los Angeles (1954-1970).

> "¿Qué es el tiempo?. Si no me lo preguntan, lo se; si me lo preguntan, lo ignoro".

¿Qué son el tiempo, el espacio y la masa? Lograr dar una definición absoluta de estos tres conceptos es claramente una empresa imposible, y cualquier explicación que demos muy probablemente resultará insatisfactoria. Lo que nos dicen algunos integrantes del Círculo de Viena es que tales conceptos se definen a través del mismo proceso de medición, es decir dando la receta para medirlos. En otras palabras, los conceptos cuantitativos están definidos por las mismas reglas que definen el proceso de medición. Esto se suele llamar "definición operacional". El primero en introducir esta idea fue Ernest Mach, una de las figuras más prominentes del Círculo de Viena, al proponer una definición operacional de la masa inercial en su artículo de 1868 "*Uber die Definition der Masse*" (Repertorium der Experimentalphysik **4**, pag. 355). Esta idea fue defendida con énfasis por P. W. Bridgman en sus obras, hoy clásicas, *The Logic of Modern Physics* (MacMillan, New York,1927) y *The Nature of Physical Theory* (Dover, New York, 1936). Más cerca del sentido común, Carnap opinaba que deberíamos considerar a los conceptos de la física como sujetos a un proceso de especificación cada vez más preciso, y no como conceptos definidos totalmente mediante reglas operacionales.

2. La longitud

Para poder medir longitudes necesitamos definir algunas operaciones. Empecemos imaginando un método para decir cuando dos longitudes son iguales. Por ejemplo, supongamos que tenemos dos cuerpos con bordes rectos. Si al poner ambos bordes lado a lado, con uno de los extremos coincidentes, los otros extremos también coinciden, decimos que ambos cuerpos tienen igual longitud.

La segunda operación no es tan sencilla. En primero lugar debemos notar que no todos los conceptos cuantitativos son iguales. Pensemos en la temperatura, por ejemplo. Sin duda es un concepto cuantitativo, pero de una naturaleza muy distinta a la de los tres conceptos que nos ocupan. La longitud, el tiempo y la masa son, o parecen ser, "magnitudes extensas" que

verifican una regla de aditividad. Supongamos que colocamos lado a lado los cuerpos del ejemplo anterior, con sus bordes alineados y con dos de sus extremos en contacto. Decimos que la entidad física resultante (la línea recta formada por la combinación de ambos bordes) tendrá una longitud que es la suma de las longitudes de ambos cuerpos. A primera vista parece obvio que la longitud cumple esta regla de aditividad, pero eso es sólo porque así es en nuestra experiencia diaria. No hay nada que nos indique que debe ser siempre así. Podría ocurrir que en ciertas condiciones esta regla no sea válida. Podemos intentar imaginar cuales podrían ser estas condiciones y cuales serían sus consecuencias. Por ejemplo, la velocidad es una magnitud que parece ser aditiva y no lo es. Y no puede serlo porque existe un límite máximo para su magnitud (*id est* la velocidad de la luz).

Pasemos ahora a la tercera y última operación que "define" el concepto de longitud. Nos estamos refiriendo a la elección de un objeto o un proceso natural que pueda ser reproducido fácilmente y que permita definir la unidad de medida. Una vez definida esta unidad, sólo resta aplicar la regla de aditividad para "medir" cuantas veces el objeto en cuestión contiene o es contenido por ella.

3. Sistema Internacional de Unidades: SI

El sistema métrico decimal que utilizamos en la ciencia fue creado durante la Revolución Francesa. El depósito de dos piezas de platino representando el metro y el kilogramo en los Archivos de la República en París el 22 de Junio de 1799 constituyó el primer paso en el desarrollo de un sistema internacional de unidades. Gauss fue uno de los primeros promotores del sistema métrico para las ciencias físicas, al medir la fuerza magnética de la Tierra en términos de un sistema decimal basado en el segundo, el milímetro y el gramo como unidades de tiempo, longitud y masa, respectivamente.

En 1874, la Asociación Británica para el Avance de la Ciencia (British Association for the Advancement of Science: BAAS) introdujo el sistema cgs, basado en las unidades segundo, centímetro y gramo, y usando prefijos desde micro- hasta mega- para expresar submúltiplos ó múltiplos decimales. El subsecuente desarrollo de la física experimental se basó en este nuevo sistema.

El 20 de Mayo de 1875, representantes de 17 países firmaron en París la Convention du Mètre, un tratado diplomático que daba autoridad a la Conférence Générale des Poids et Mesures (CGPM), el Comité International des Poids et Mesures (CIPM) y el Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) en materia de metrología[1]. El CIPM se concentró en la construcción de nuevos prototipos para el metro y el kilogramo, que sancionó como patrones internacionales. Junto con el segundo astronómico como unidad de tiempo, quedó establecido un nuevo sistema de unidades similar al cgs pero basado en el segundo, el metro y el kilogramo[2].

Originalmente el metro fue definido como la diez millonésima parte del cuadrante de la Tierra. El "métre des Archives" de 1799 fue medido en base al meridiano entre Dunquerque y Barcelona. El prototipo internacional de 1889 era una copia de ese primer"metro". Sirvió como unidad de longitud hasta 1960, cuando fue reemplazado por una definición basada en la longitud de onda de una cierta línea naranja del espectro de la luz emitida por el isótopo 86 del kriptón. A su vez, esta definición dio lugar en 1983 a la definición actual, que se deriva al asignar un valor definido a la velocidad de la luz en el vacío ($c_o = 299792458$ m/seg).

4. El tiempo

El filósofo y psicólogo norteamericano William James (1843-1916) opinaba que el tiempo, la realidad del mundo exterior y el conocimiento son los grandes problemas de la filosofía. Además están presentes en la misma base de nuestra ciencia. Ahora vamos a tratar el primero y posiblemente el más difícil de estos problemas esenciales, el tiempo[3].

Muchos filósofos (Aristóteles entre ellos, ¿cuándo no?) han intentado explicar el tiempo en términos de movimiento, pero el movimiento ocurre en el tiempo y no puede explicarlo. Nuestra experiencia más directa del tiempo está en el fluir de nuestra conciencia; y posiblemente esa sucesión sea lo que entendemos como tiempo. Trabajando con mucho cuidado (un cuidado que

no tuvieron los Padres Fundadores de la Física) podemos imaginar formas de diseñar las tres reglas (de igualdad, aditividad y unidad) que nos permitan dar una definición operacional del tiempo. Sobre la regla de aditividad para el tiempo valen los mismos comentarios y las mismas dudas que discutimos en el caso de la longitud.

La unidad del Sistema Internacional para el tiempo es el segundo y está definida en términos de la frecuencia de una transición hiperfina del átomo de Cesio. En varios laboratorios nacionales se dispone de relojes de Cesio, con una incerteza estimada en 10^{-15}.

5. Algunas definiciones cinemáticas

Sobre la base de las magnitudes "primitivas" de tiempo y longitud, podemos ahora definir otras magnitudes "derivadas" para describir el movimiento. Un cuerpo en movimiento puede girar o vibrar. Para evitar estas complicaciones supondremos -por ahora- que el cuerpo es muy pequeño. Obviamente, este es un concepto relativo. Por ejemplo, la Tierra en su órbita alrededor del Sol puede considerarse como un objeto sin tamaño.

También el concepto de movimiento tiene un significado relativo: Se refiere a la modificación de la posición relativa de los cuerpos entre sí. Por ello se define un "cuerpo de referencia" idealizado como un "sistema de coordenadas" (Es decir una terna de ejes cartesianos ortogonales rígidos). Ubicamos una *partícula* por el *vector posición* $\mathbf{r}$ que va del cuerpo de referencia hasta el punto en cuestión. Al moverse, la posición de la partícula varía con el tiempo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. El lugar geométrico de los puntos que ocupa el cuerpo en su movimiento se llama *trayectoria*.

6. Sistemas de coordenadas

Como decíamos, al vector posición $\mathbf{r}$ lo podemos representar de manera unívoca por medio de sus *componentes* (x, y, z) respecto de un sistema de coordenadas definido por un *origen* O y tres vectores normalizados, o *versores*, ortogonales $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$. De esta manera, el vector posición puede descomponerse de la siguiente manera:

$$\mathbf{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}\ ,$$

y la distancia de la partícula al centro del sistema de coordenadas está dado por el *módulo*

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

Una propiedad esencial de todo cálculo con vectores es su independencia respecto del sistema de coordenadas que por conveniencia se haya introducido para su mejor descripción. Supongamos que los tres versores $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$ se sustituyen por otro conjunto $\hat{x}'$, $\hat{y}'$ y $\hat{z}'$, también ortogonales entre sí, de manera tal que $\mathbf{r} = x'\,\hat{x}' + y'\,\hat{y}' + z'\,\hat{z}'$. Por el solo hecho de ser vectores, los versores $\hat{x}'$, $\hat{y}'$ y $\hat{z}'$ están determinados por sus componentes en el sistema de coordenadas original $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$,

$$\begin{aligned}
\hat{x}' &= (\hat{x}\cdot\hat{x}')\ \hat{x} + (\hat{y}\cdot\hat{x}')\ \hat{y} + (\hat{z}\cdot\hat{x}')\ \hat{z} \\
\hat{y}' &= (\hat{x}\cdot\hat{y}')\ \hat{x} + (\hat{y}\cdot\hat{y}')\ \hat{y} + (\hat{z}\cdot\hat{y}')\ \hat{z} \\
\hat{z}' &= (\hat{x}\cdot\hat{z}')\ \hat{x} + (\hat{y}\cdot\hat{z}')\ \hat{y} + (\hat{z}\cdot\hat{z}')\ \hat{z}\ .
\end{aligned}$$

Los coeficientes $(\cdot)$ se denominan *cosenos directores* de la transformación de coordenadas. Definiendo la matriz

$$\mathcal{A}_{OO'} = \begin{bmatrix} \hat{x}\cdot\hat{x}' & \hat{y}\cdot\hat{x}' & \hat{z}\cdot\hat{x}' \\ \hat{x}\cdot\hat{y}' & \hat{y}\cdot\hat{y}' & \hat{z}\cdot\hat{y}' \\ \hat{x}\cdot\hat{z}' & \hat{y}\cdot\hat{z}' & \hat{z}\cdot\hat{z}' \end{bmatrix}\ ,$$

podemos reunir las expresiones anteriores en la siguiente relación matricial,

$$\begin{bmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \\ \hat{z}' \end{bmatrix} = \mathcal{A}_{OO'} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}\ .$$

La normalidad y ortogonalidad de los nuevos versores implican ciertas condiciones sobre los coeficientes de la matriz $\mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{n=x,y,z} (\hat{n}\cdot\hat{x}')^2 \qquad \text{etc.} \\
0 &= \sum_{n=x,y,z} (\hat{n}\cdot\hat{x}')\,(\hat{n}\cdot\hat{y}') \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Estas condiciones indican que $\mathcal{A}_{\mathrm{OO}'}$ es una matriz *ortogonal*, es decir que

$$\mathcal{A}_{\mathrm{OO}'} \cdot \mathcal{A}^t_{\mathrm{OO}'} = \mathcal{I} \ ,$$

donde el supraíndice t indica la transposición de los coeficientes de la matriz, e $\mathcal{I}$ es la matriz *identidad*. En otros términos, la transformación inversa está dada por $\mathcal{A}_{\mathrm{O}'\mathrm{O}} = \mathcal{A}^t_{\mathrm{OO}'}$.

Si anotamos con $[\mathbf{r}]_{\mathrm{O}}$ a la matriz columna formado por las componentes del vector $\mathbf{r}$ en el sistema de coordenadas O, es decir

$$[\mathbf{r}]_{\mathrm{O}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \ ,$$

entonces,

$$[\mathbf{r}]_{\mathrm{O}'} = \mathcal{A}_{\mathrm{OO}'} \cdot [\mathbf{r}]_{\mathrm{O}} \ .$$

Consideremos, por ejemplo, un sistema de coordenadas tal que el versor $\hat{z}'$ coincide con el $\hat{z}$, pero donde los versores $\hat{x}'$ y $\hat{y}'$ están rotados un ángulo ϕ en sentido antihorario respecto de los versores $\hat{x}$ e $\hat{y}$, respectivamente. La matriz de transformación es

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

Un teorema debido a Euler nos indica que toda transformación[4] entre sistemas de coordenadas ortogonales es equivalente a una rotación de ángulo ϕ alrededor de un eje fijo. En otras palabras, siempre hay al menos una dirección a lo largo de la cual todo vector tiene las mismas componentes en uno y otro sistema de coordenadas[5].

7. Coordenadas curvilíneas ortogonales

Hasta ahora sólo nos hemos referido a sistemas de coordenadas cartesianas ortogonales y a las transformaciones por rotación. En ellos un punto del espacio queda determinado por sus distancias x, y y z a tres planos ortogonales entre sí, o planos coordenados. Sin embargo, este sistema de coordenadas no es el único, ni en ocasiones el más conveniente, para describir la evolución de una partícula. Si, por ejemplo, el cuerpo está limitado a moverse sobre una superficie, será más conveniente utilizar un sistema donde una de las coordenadas permanezca inalterada sobre esa superficie. En general, un sistema de coordenadas está caracterizado por una terna u_1, u_2 y u_3 de números reales con una correspondencia biunívoca con las coordenadas cartesianas x, y y z. Por cada punto del espacio pasan tres superficies $u_i(x, y, z) = \text{cte.}$ llamadas *superficies coordenadas*. Sus intersecciones son las *líneas coordenadas*, a lo largo de las cuales sólo varía una de las coordenadas u_i. Si alguna de las funciones $u_i(x, y, z) = \text{cte.}$ no es lineal, las superficies coordenadas no son todas planas, ni las líneas coordenadas son todas rectas. Se dice entonces que las coordenadas u_1, u_2 y u_3 constituyen un sistema de coordenadas curvilíneas.

Si $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}x\,\hat{x} + \mathrm{d}y\,\hat{y} + \mathrm{d}z\,\hat{z}$ es un desplazamiento arbitrario sobre una superficie coordenada $u_i(x, y, z) = \text{cte.}$, entonces

$$0 = \mathrm{d}u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u_i}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial u_i}{\partial z}\,\mathrm{d}z = \nabla u_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \ .$$

Vemos que el gradiente ∇u_i es normal a la superficie $u_i(x, y, z) = \text{cte.}$ Por lo tanto, el versor $\hat{u}_i = h_i \nabla u_i$, con $h_i = 1/|\nabla u_i|$, también es normal a la i-ésima superficie coordenada. De manera trivial, la transformación del sistema cartesiano al curvilíneo está dado por

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{bmatrix} = \mathcal{A} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \ ,$$

donde $\mathcal{A}$ está definido por las componentes cartesianas de los versores $\hat{u}_i$, es decir

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} u_{1x} & u_{1y} & u_{1z} \\ u_{2x} & u_{2y} & u_{2z} \\ u_{3x} & u_{3y} & u_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1\,\partial u_1/\partial x & h_1\,\partial u_1/\partial y & h_1\,\partial u_1/\partial z \\ h_2\,\partial u_2/\partial x & h_2\,\partial u_2/\partial y & h_2\,\partial u_2/\partial z \\ h_3\,\partial u_3/\partial x & h_3\,\partial u_3/\partial y & h_3\,\partial u_3/\partial z \end{bmatrix} \ .$$

El caso más importante de sistema de coordenadas curvilíneas es aquel en que las tres superficies coordenadas son ortogonales entre sí. Se dice entonces que el sistema de coordenadas curvilíneas es *ortogonal*. Para que ello ocurra, los tres versores $\hat{u}_i$ deben ser ortonormales, de manera tal que formen un triedro rectángulo en cada punto del espacio. En este caso la matriz $\mathcal{A}$ es ortogonal, y por lo tanto, la transformación inversa entre ambos conjuntos de versores está dada por

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} = \mathcal{A}^t \cdot \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u_2} \\ \hat{u}_3 \end{bmatrix} .$$

Un desplazamiento arbitrario $\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}x\,\hat{x} + \mathrm{d}y\,\hat{y} + \mathrm{d}z\,\hat{z}$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{r} &= \mathrm{d}x \left(h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\hat{u}_1 + h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\hat{u}_2 + h_3 \frac{\partial u_3}{\partial x}\hat{u}_3 \right) \\ &+ \mathrm{d}y \left(h_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}\hat{u}_1 + h_2 \frac{\partial u_2}{\partial y}\hat{u}_2 + h_3 \frac{\partial u_3}{\partial y}\hat{u}_3 \right) \\ &+ \mathrm{d}z \left(h_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}\hat{u}_1 + h_2 \frac{\partial u_2}{\partial z}\hat{u}_2 + h_3 \frac{\partial u_3}{\partial z}\hat{u}_3 \right) , \end{aligned}$$

y reordenando los términos

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} h_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u_i}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u_i}{\partial z}\mathrm{d}z \right) \hat{u}_i ,$$

o sea

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = h_1\,\mathrm{d}u_1\,\hat{u}_1 + h_2\,\mathrm{d}u_2\,\hat{u}_2 + h_3\,\mathrm{d}u_3\,\hat{u}_3 .$$

Y en módulo,

$$|\mathrm{d}\mathbf{r}|^2 = h_1^2\,(\mathrm{d}u_1)^2 + h_2^2\,(\mathrm{d}u_2)^2 + h_3^2\,(\mathrm{d}u_3)^2 .$$

Este resultado parece ser trivialmente cierto, pero debe tenerse en cuenta que para su deducción utilizamos la ortogonalidad de las coordenadas curvilíneas. Tal como veremos esta última expresión es muy práctica[6] para el cálculo de los parámetros h_i.

8. Coordenadas cilíndricas

En este sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales, un punto $\mathbf{r}$ se determina por las coordenadas polares (ρ, φ) de su proyección sobre el plano (x, y), y por la coordenada z, según se muestra en la siguiente figura. El vector posición está dado por

$$\mathbf{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z} .$$

Las fórmulas de transformación son

$$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi \qquad z = z$$

y

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \arctan(y/x) \qquad z = z .$$

Diferenciando las primeras ecuaciones obtenemos que

$$|\mathrm{d}\mathbf{r}|^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2 = (\mathrm{d}\rho)^2 + \rho^2\,(\mathrm{d}\varphi)^2 + (\mathrm{d}z)^2 ,$$

y por lo tanto

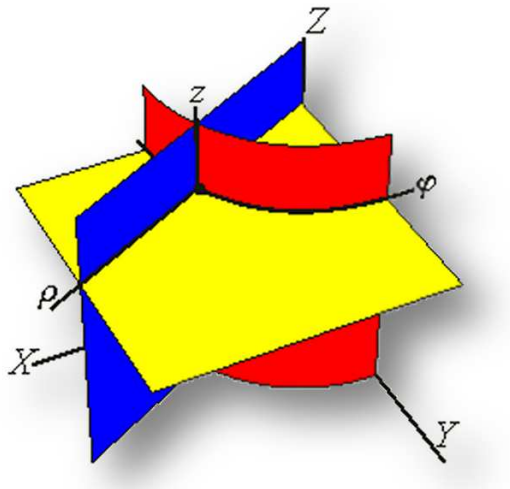
$$h_\rho = 1 \qquad h_\varphi = \rho \qquad h_z = 1 .$$

De esta manera, el diferencial de línea está dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{r} &= h_\rho\,\mathrm{d}\rho\,\hat{\rho} + h_\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\hat{\varphi} + h_z\,\mathrm{d}z\,\hat{z} \\ &= \mathrm{d}\rho\,\hat{\rho} + \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\hat{\varphi} + \mathrm{d}z\,\hat{z} . \end{aligned}$$

La matriz de transformación se escribe

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$



Coordenadas cilíndricas. Se han indicado las superficies de ρ (rojo), φ (azul) y z (amarillo) constante[7].

9. Coordenadas esféricas

Estas coordenadas curvilíneas ortogonales son la distancia r del punto $\mathbf{r}$ al origen, el ángulo φ de su proyección sobre el plano (x, y) respecto del eje $\hat{x}$, y el ángulo θ que forma $\mathbf{r}$ con el eje $\hat{z}$. El vector posición es, simplemente, $\mathbf{r} = r\hat{r}$. Las fórmulas de transformación son

$$x = r\cos\varphi\,\sin\theta \qquad y = r\sin\varphi\,\sin\theta \qquad z = r\cos\theta$$

y

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \varphi = \arctan y/x \qquad \theta = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\ .$$

Diferenciando las primeras ecuaciones obtenemos que

$$|\mathrm{d}\mathbf{r}|^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2 = (\mathrm{d}r)^2 + r^2\,\sin^2\theta\,(\mathrm{d}\varphi)^2 + r^2(\mathrm{d}\theta)^2\ ,$$

y por lo tanto

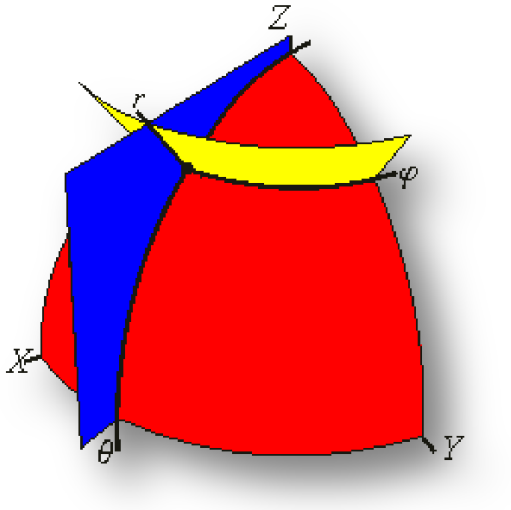
$$h_r = 1 \qquad h_\varphi = r\sin\theta \qquad h_\theta = r\ .$$

De esta manera, el diferencial de línea está dado por

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathbf{r} &= h_r\,\mathrm{d}r\,\hat{r} + h_\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\hat{\varphi} + h_\theta\,\mathrm{d}\theta\,\hat{\theta}\\ &= \mathrm{d}r\,\hat{r} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\hat{\varphi} + r\,\mathrm{d}\theta\,\hat{\theta}\ .\end{aligned}$$

La matriz de transformación se escribe

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \sin\theta\,cos\varphi & \sin\theta\,\sin\varphi & \cos\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \cos\theta\,\cos\varphi & \cos\theta\,\sin\varphi & -\sin\theta \end{bmatrix}\ .$$



Coordenadas esféricas. Se han indicado las superficies de r (rojo), φ (azul) y θ (amarillo) constante[7].

10. Velocidad y aceleración

La *velocidad* de una partícula es la rapidez con que cambia su posición al transcurrir el tiempo

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

A su vez, la velocidad del cuerpo también suele cambiar al trancurrir el tiempo. Entonces se dice que el cuerpo tiene una aceleración

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \,.$$

La posición, la velocidad y la aceleración son entes vectoriales. Sea una trayectoria no constantemente rectilinea y consideremos un arco de ella suficientemente pequeño como para que la variación del radio y de la posición del centro de curvatura sea despreciable. Consideremos además un sistema de coordenadas que acompaña a la partícula, con el origen en ella, un eje de versor $\hat{e}_\parallel$ tangencial a la trayectoria, y otro definido por el versor $\hat{e}_\perp$ que apunta hacia el centro de curvatura. Derivando la velocidad $\mathbf{v} = v\hat{e}_\parallel$ obtenemos la aceleración

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v\hat{e}_\parallel = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\hat{e}_\parallel + v\,\frac{\mathrm{d}\hat{e}_\parallel}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\hat{e}_\parallel + v\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\,\hat{e}_\perp \\ &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\hat{e}_\parallel + v\,\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\hat{e}_\perp = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\hat{e}_\parallel + \frac{v^2}{r}\,\hat{e}_\perp \,. \end{aligned}$$

Vemos que la aceleración puede no ser tangente a la trayectoria. Mientras que la componente tangencial representa la variación de la rapidez de movimiento sobre la trayectoria, la componente perpendicular –llamada aceleración centrípeta– representa la variación de la dirección de la velocidad.

Definimos la velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ de una partícula de velocidad $\mathbf{v}$ como un vector perpendicular al plano de movimiento y cuya magnitud está dada por la rapidez con que varía el ángulo barrido por el vector posición

$$\mathbf{\Omega} = \frac{\mathbf{r}\times\mathbf{v}}{r^2} \,.$$

11. Velocidad y aceleración en coordenadas curvilíneas

El cálculo de la velocidad y la aceleración a partir de la variación de las coordenadas de $\mathbf{r}(t)$ es trivial en un sistema cartesiano

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\hat{x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\hat{y} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\hat{z} \\ \mathbf{a} &= \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\,\hat{x} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\,\hat{y} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\,\hat{z} \,. \end{aligned}$$

En un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales, en cambio, los versores pueden rotar con el tiempo. Es decir,

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h_i\nabla u_i) \neq 0 \,,$$

y por lo tanto el cálculo de las velocidades y aceleración no es tan simple como en el caso cartesiano.

En coordenadas cilíndricas tenemos que

$$\mathrm{d}\hat{\rho} = \hat{\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \qquad \mathrm{d}\hat{\varphi} = -\,\hat{\rho}\,\mathrm{d}\varphi \qquad \mathrm{d}\hat{z} = \mathrm{d}\hat{z}$$

y en coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\hat{r} &= \hat{\theta}\,\mathrm{d}\theta + \hat{\varphi}\,\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}\hat{\varphi} &= -\,\hat{r}\,\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi - \hat{\theta}\,\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}\hat{\theta} &= -\,\hat{r}\,\mathrm{d}\theta + \hat{\varphi}\,\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi \,. \end{aligned}$$

Dejamos como un ejercicio expresar la velocidad y la aceleración de un punto en estos dos sistemas. Los resultados son:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\,\hat{\rho} + \rho\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\hat{\varphi} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\hat{z} \\
\mathbf{a} &= \left[\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2} - \rho\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\hat{\rho} + \left[2\,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \rho\,\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\right]\hat{\varphi} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\,\hat{z} \\
\mathbf{v} &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\hat{r} + r\,\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,\hat{\varphi} + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\hat{\theta} \\
\mathbf{a} &= \left[\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 - r\sin^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\hat{r} + \\
&\quad + \left[2\,\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + 2\,r\,\cos\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + r\sin\theta\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\right]\hat{\varphi} + \\
&\quad + \left[2\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r\,\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} - r\,\sin\theta\cos\theta\,\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\hat{\theta}\,.
\end{aligned}
$$

12. Rango de validez

Las definiciones operacional de la longitud y el tiempo, junto con una definición similar de la masa inercial que discutimos en otro apunte, forman la base axiomática de la Mecánica en la reformulación propuesta por el Círculo de Viena. A partir de ese punto vamos construir la Mecánica en forma deductiva y autoconsistente, y en un todo similar a la formulación usual. Las definiciones de tiempo, longitud y masa están tan arraigadas en nuestra percepción del mundo, que cuesta imaginarse cómo podrían estar equivocadas. En este sentido no resulta sorprendente que los sucesores de Newton se hayan sentido tentados a conferirles el carácter de axiomas necesarios, validados por la experiencia. Sin embargo, con el desarrollo de las geometrías no euclidianas a fines del siglo pasado, los axiomas perdieron su evidencia, para transformarse en principios arbitrarios. Así Heinrich Hertz (1857-1894) en sus lecciones de física matemática introducía los principios de la mecánica como decretos sin referencia a ningún resultado experimental: "Conocemos y postulamos que ..." (*Wir können und wollen setzen...*). Más cerca en el tiempo, este mismo método fue utilizado por Landau en su curso de Física Teórica, que comienza postulando el principio de mínima acción[8].

Al cambiar el siglo, el desarrollo de la teoría restringida de la relatividad y la física cuántica mostraron claramente que los axiomas de la Mecánica tenían una validez limitada. Cómo y porqué la Mecánica newtoniana deja de ser válida cuando las velocidades se aproximan a la velocidad de la luz, o cuando no se cumplen ciertas limitaciones impuestas por la Física Cuántica serán estudiadas en otros cursos.

Notas

[1]Este tratado, levemente modificado en 1921, sigue en vigencia con la participación de 48 naciones, Argentina entre ellas.

[2]En 1946, el CIPM aprobó la adopción del ampere como unidad de corriente. Después de una serie de consultas internacionales iniciadas en 1948, la décima CGPM aprobó en 1954 la introducción del Kelvin y la Candela como unidades de temperatura e intensidad luminosa. En 1960, la undécima CPGM adoptó el nombre de Sistema Internacional de Unidades (SI) para este sistema. En la decimocuarta CGPM, el SI se completo con el agregado de una séptima unidad, el mol, como unidad de cantidad de substancia.

[3]Borges menciona que nadie "ha sentido con mayor intensidad que San Agustín el problema del tiempo, esa duda del tiempo. San Agustín dice que su alma arde, que está ardiendo porque quiere saber qué es el tiempo. El le pide a Dios que le revele qué es el tiempo. No por vana curiosidad sino porque él no puede vivir sin saber aquello".

[4]El conjunto de todas las posibles matrices $\mathcal{A}$ definen una estructura de la matemática denominada *grupo*. Se trata del grupo de matrices **O**rtogonales e**S**peciales en **3** dimensiones, o **SO(3)**.

[5]Mediante una transformación de semejanza es siempre posible transformar la matriz $\mathcal{A}_{OO'}$ a un sistema de coordenadas en el que el eje $\hat{z}$ coincide con el eje de giro. En tal sistema de coordenadas la transformación es un giro de ángulo ϕ alrededor del eje $\hat{z}$ y está representada por la matriz anterior. Su traza es igual a $1+2\cos\phi$. Y como la traza es siempre invariante respecto de las transformaciones de semejanza se tiene que $\mathrm{Traza}(\mathcal{A}_{OO'}) = 1 + 2\cos\phi$.

[6]Dependiendo de las coordenadas curvilíneas ortogonales utilizadas, las expresiones para las operaciones vectoriales tales como el gradiente, la divergencia, el rotor ó el laplaciano pueden ser muy complicadas. Sin embargo puede demostrarse que todas ellas dependen sólo de los coeficiente h_i

[7]Licencia de documentación libre GNU

[8]L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics* (Pergamon Press, Oxford, 1976).